

大學與高中數學教學落差

Survey Report 討論

—2020 教育議題論壇

中華民國數學會將於 2020 年 12 月 5 日的年會中午舉辦 90 分鐘的教育議題論壇，由李瑩英理事長主持，分別從微積分的教學現場、高中課綱、數學會教育議題小組針對今年進行的「大學與高中數學教學落差意見調查」的分析報告等視角，進行意見交流。另外，數學會正在規劃「教育議題部落格」，希望未來能透過「教育議題部落格」，持續提供意見交換的平台，讓關心這些議題的聲音有機會產生正面改變的力量。

與談人

林俊吉 (師範大學), 蔡雅如 (臺灣大學),

嚴健彰 (輔仁大學), 單維彰 (中央大學),

張海潮 (臺灣大學)

主持人

李瑩英 (臺灣大學)

時間 12 月 5 日 (週六), 12:20- 13:50

地點 輔仁大學理工綜合教室 LH108

聯絡人 吳佳臻 (tms@math.ntu.edu.tw)

1. 您在教學歷程中對於大一新生特質的特別感受，不論正面或負面皆可，以能引起您的觀察興趣為重點。
2. 您最不满意學生缺乏而高中理應培養的數學能力。
3. 教學時，您相當訝異學生竟然高中之前沒有學過的數學知識，越具體的細節對我們越有幫助。請在下面的 A、B 子題填入附上各能力項目的代號。例如：若選「函數概念」、「夾擠定理」時，可只填入 2.1、3.4 即可。
- A. 重要但學生基礎薄弱：
- B. 對微積分不重要：
- C. 其它沒列入附表上的能力項目：
4. 您通常如何處理這類教學落差？尤其是您認為大部分學生的數學能力不足或學生差異很大的時候。
5. 關於不同招生管道的差異性，您個人的感受。
6. 您覺得特別值得分享給其他老師的教學體驗。
7. 您覺得大學端本身可以在大一階段做的調整或措施，進而改變現狀。
8. 您想建議教育部的意見。

大學與高中數學教學落差

Survey Report (I)

中華民國數學會教育議題工作小組召集人 林俊吉

許多數學界的同仁都注意到，近年國內數學研究所的招生無論是質與量都明顯下滑，大學部的學生也有學習落差、適應的問題，隨著大學的不同，這些差異甚至十分顯著。另一方面，有些大學的數學相關系所亦已更名，部分傳統的數學核心必修課程也有消失或改為選修的現象。許多人認為讀數學、懂理論，對個人的未來與社會的發展是沒有什麼用處的。但反過來看近一、二十年來的世界潮流，無論從相當熱門的金融數學還是當紅的人工智慧、大數據，許多的趨勢報告（例如 Career Cast）都透露，掌握數學的知識、能力與學位，對於未來個人職涯的發展有極大的優勢。

從教育的立場，我們不應該將數學的學習與個人職涯發展畫上等號，但上述的落差我們應該正視，甚至探討，為何學校教育系統裡的數學教學與時代的趨勢有如此大的反差甚至有逆向發展的呈現呢？

中華民國數學會基於對台灣數學的領域發展與學生在數學學習現況的憂心，認為應該積極提供平台以促進對於上述問題的討論與對話，進一步協助釐清問題與提供因應之道。我們了解不同的大學所面臨的發展困境不盡相同。我們評估，這些問題牽連廣泛，**從學校教育現場、學術發展現況、數學文化生根、到社會與產業發展等，是複雜且彼此交錯關聯的。**中華民國數學會教育議題工作小組便是在對於這些問題的憂心下成立的，目前我們跨出的第一步是選擇關注大學端微積分的教學現況，從今年的5月中下旬開始，針對近5年在各大專院校教授過微積分約400多位教員，發送意見調查。目前初步回收了229份回覆意見（7月初的統計），刻正整理、分析中。未來也歡迎對此議題有熱情的數學界同仁加入討論。

為了廣泛收集各方高見，我們將持續接受回覆意見，若有遺珠之憾，未收到邀請填寫函的數學界同仁，敬請直接聯繫中華民國數學會秘書：Ms. 吳佳臻 tms@math.ntu.edu.tw

底下是這份意見調查的邀請填寫說明、問題。**教育議題工作小組將在下一期提出完整的報告，包括後續進展，詳細的分析，及進一步的討論。**



大學與高中數學教學落差問卷

近年教改不斷變革，影響所及，大學之前的數學教學內容也持續變化。而大學端第一線教授微積分課程同仁的抱怨與挫折亦時有所聞。為了讓分散在不同時空的意見更加凝聚、具體，甚至更有改變政策的參考價值，中華民國數學會懇請各位授課教師協助我們留下您寶貴的教學經驗與意見。我們將做深入的整理與分析，這樣不但能回饋各位，更可做為未來數學會以國內最高專業數學家組織在參與教育政策的討論與擬定時，提供彌合大學與高中數學教學落差的重要參考資料。

底下是一些簡單的可能提示，或許可以協助釐清您的經驗或意見，讓回覆更為聚焦。您不見得要逐條回答，當然任何其他意見我們也都非常重視。必要時，請特別註明您所提之意見是針對數學系學生、理工科學生、或其他領域學生。

1. 您在教學歷程中對於大一新生特質的特別感受，不論正面或負面皆可，以能引起您的觀察興趣為重點。

2. 您最不满意學生缺乏而高中理應培養的數學能力。

3. 教學時，您相當訝異學生竟然高中之前沒有學過的數學知識，越具體的細節對我們越有幫助。請在下面的 A. B. 子題填入附表上各能力項目的代號。例如：若選「函數概念」、「夾擠定理」時，可只填入 2.1、3.4 即可。

A. 重要但學生基礎薄弱：

B. 對微積分不重要：

C. 其它沒列入附表上的能力項目：

4. 您通常如何處理這類教學落差？尤其是您認為大部分學生的數學能力不足或學生差異很大的時候。

5. 關於不同招生管道的差異性，您個人的感受。

6. 您覺得特別值得分享給其他老師的教學體驗。

7. 您覺得大學端本身可以在大一階段做的調整或措施，進而改變現狀。

8. 您想建議教育部的意見。

附表連結：<https://reurl.cc/Njx5lq>

大學與高中數學教學落差

Survey Report (II)

中華民國數學會教育議題工作小組

1. 前言

中華民國數學會本著關心臺灣數學領域發展與學生學習，積極提供平台以促進教育議題的討論與對話，期以協助釐清問題與提供因應之道。因此在這樣的動機下成立教育議題工作小組，我們第一階段的工作原是希望訂定一些指標，結合部分理工科系申請入學的第二階段考試，促成選考理工科系大約前15%的高中生可以在數學有更扎實的準備。然而在瞭解現狀後，發現只有一些數學系及部分臺大系所在二階考試測驗數學，原來的方案窒礙難行。我們因此一方面構思成立教育資源平台，希望提供有興趣的學生可以自學的素材，並在這樣的背景下取得過去高中數學實驗本的電子檔，另一方面覺得有必要了解大學端微積分的教學現況，所以從2020年的5月中下旬開始，針對近5年在各大專院校教授過微積分約400多位教員，發送意見調查，並回收了大約230份回覆意見。

在第36期電子報 (<http://www.tms.org.tw/tw/modules/filelist/download/get/170>) 曾刊載問卷的完整題幹內容，其中第1題到第3題偏重對學生高中數學知識背景的觀察，後面幾題則包括如何處理這類教學落差、特別值得分享給其他老師的教學體驗、覺得大學端可以在大一階段做的調整或措施、想建議教育部及其它意見等。受限於時間及篇幅，目前這份報告先僅針對第1題到第3題的回覆意見進行整理與解讀，雖然也已經對第4題到第9題的調查結果進行初步整理，但將留到後續的報告再彙整。我們計畫設置一個教育議題部落格，公布相關資料及進行中的工作，同時與數學界同仁透過這個園地有更多的交流討論。

在底下的分析，我們將大學粗分為二個組別，主要是依據大學入學考試理工科系大致的分數排序，第一組是在該排序上約略較前段且是傳統上的綜合型大學。歸類在第一組的大學有：臺大、政大、臺師大、中央、清大、交大、中興、中正、成大、中山，其它大學則列入第二組。做此分組的原因是在初步分析回覆意見時，發現到入學時不同學習表現的學生似乎有許多觀察上的差異，甚至有互相矛盾的地方。我們希望透過學校的分組，能更精準反應出不同層次的現象，以助於問題的分析。

當前臺灣的數學界面臨許多難題與挑戰，一方面在各方強調數學在AI時代、量子電腦與計算來臨時的重要性時，也看到教育單位不重視數學的措施。教育議題工作小組除了針對高中到大學的數學落差進行意見調查與分析外，也十分關心其它的議題。例如，大學階段的數學課程（已有知名大學的工學院系所，縮減工程數學的必修學分），各數學系在教學、招生與其它面向也面臨許多不同的困難及挑戰，這些都是數學會教育議題工作小組未來希望能關注討論的議題。在今年數學年會我們將安排一場教育論壇，希望先針對此次「大學與高中數學教學落差」調查報告，與數學界同仁進行更深入與廣泛的討論。

這份報告探討的主軸是大學與高中數學教學的落差現狀，但論述過程中免不了會涉及高中數學課綱內容，針對部分理解不精確的部分，在徵詢負責課綱同仁的意見後已儘可能作出調整。由於大多數數學界同仁對高中數學課綱並不熟悉，或許未來可以邀請曾參與過課綱訂定的同仁在電子報撰文向大家介紹說明。我們也期待未來有更多對教育議題有熱情的數學界同仁一起加入討論。

2. 大學與高中數學知識落差

第 2 題題幹：您最不滿意學生缺乏而高中理應培養的數學能力。

第 3 題題幹：教學時，您相當訝異學生竟然高中之前沒有學過的數學知識，越具體的細節對我們越有幫助。

針對這次的「大學與高中數學教學落差」意見調查回覆意見整理，我們先呈現在大學教師心目中，因為高中數學教學差距而造成教學困擾的主要項目。在問卷上本來有兩個題目，第 2 題針對比較關鍵性或急迫性的能力落差，第 3 題則是藉由我們提供的課綱列表進行比較地毯式的調查。這兩題是本次問卷關於大學與高中數學知識落差的總結，因此底下將調查結果一起呈現。在這次的調查中，關於「大學與高中數學知識落差」部分，我們附上輔助大家填寫用的「綱要表列」。但不同於一般的問卷，我們是以開放式的問法呈現，而非一般作法針對每一項進行勾選問答。因此百分比的資料呈現意義上的解讀空間可以頗大。因此我們目前這份報告的寫法，比較像是針對問卷結果的說明與詮釋。但為了呈現答題者對某些議題回應的大致比率，我們也附上在意見調查第 3 題的回覆中（全部 11 個子題），勾選回答比率最高的 3 個子題之比率，列在底下（該子題答題人數 / 第 3 題全部有效答題人數）。

- A. 基本邏輯能力：97/176
- B. 三角函數：100/176
- C. 函數觀念與能力：49/176

註：一般子題答題的回覆，大致上平均是 31/176 上下。

A. 基本邏輯能力：無法正確的閱讀、書寫及表達數學論述。

這是超過 55% 回覆之大學教師的共同意見 (97/176)。邏輯思考不清晰，對於微積分所需的嚴謹論證過程將在學習上產生極大障礙。不少學生無法分辨數學命題的前提與結論（充分條件與必要條件），或者直覺知道卻無法正確表達。更嚴重的是某些高中或補習班老師的教學方式，很可能造成學生的數學推論反其道而行，從結論推回前提，而不是由前提推得結論。

另外由於大學之前的數學教育多以解題訓練為主，對於數學證明的書寫、理解與要求相對下降，數學作業或測驗更多採選擇題或填充題，缺乏思考與論證之練習。這些都導致學生進入大學學習微積分或高等數學時，面對問題或課本的論證往往無所適從。邏輯能力的缺乏尤其衝擊數學系或應用數學系學生的數學訓練。這些現象在近 20 年似乎有更趨嚴重的傾向，或許由於測驗方式改變、課程安排、教學時數減少、老師不再要求等因素影響，大學教師普遍觀察到大一新生在基本邏輯、反證法與數學歸納法方面的能力都嚴重弱化。

B. 三角函數：對三角函數不熟悉，包括積化和差、和差化積以及反三角函數。

這是所有子題中，勾選回覆最高的項目（100/176=57%）。事實上，反三角函數從高中課程刪除已久，在 99 課綱則首次將高中三角課程拆成兩部分，在高二上學習三角比，高三上學習三角函數。這樣的安排是基於考招制度的分割，但是高三上學期的數學內容僅被指考涵蓋，而目前已經有超過六成的理工學生是透過推甄申請入學，囿於這些因素，許多學生對三角函數的概念只停留在銳角三角函數（也就是三角比範圍），無法掌握微積分課程預設以廣義角概念為基礎的三角函數。99 課綱在高二介紹的三角比僅限於 \sin 、 \cos 、 \tan ，到高三才學習剩下的 \cot 、 \sec 、 \csc 三角函數。這樣的分拆延續到最新的 108 課綱，只是時間點分別提早到高一與高二。如此安排雖然讓學生學習坡度變得較為平緩，但對三角函數的整體性學習卻也造成破壞和影響。在這次調查中，許多大學微積分教師非常訝異有些學生幾乎不知道 \cot 、 \sec 、 \csc 這三個概念。目前 108 課綱的安排，雖然將 \cot 、 \sec 、 \csc 移到高二，但僅介紹這三個函數的定義與圖形，並未進一步探討它們的性質與相關恆等式，且課綱聲明這三個函數不列入

大考的範圍。

微積分中時常使用的三角公式也是學生基礎薄弱的地方。從 99 課綱開始僅保留和差角、倍角、半角等公式，而不再介紹和差化積與積化和差公式。在意見調查回覆意見中，有許多大學老師對於學生不熟悉（一般）三角函數、極坐標、反三角函數等三角相關課題感到不解，上述課綱內容的刪減造成學生對這些內容沒有較為完整的學習，但顯然有些大學老師並未了解這個狀況，透過這次意見調查，我們發現這是一個極需要提醒微積分授課教師注意的地方。本次調查之學生在高中階段仍使用 99 課綱，三角函數題材拆成前後兩部分，造成三角函數的學習無法一氣呵成。值得注意的是，在 108 課綱中「指數與對數」題材也被分拆成兩部分。為了高二的分流，課綱在高一時，對數只介紹表徵不涉及操作（例如對數律），要到高二才討論完整的指數對數公式與函數。另外，108 課綱強調指對數都以 10（或 2）為底數來處理，其餘指對數就以對數的換底公式來因應，對於指數遞減的模型，相對上討論少許多。這些高中生未來進入大學後，在指數對數題材是否也會出現類似三角函數無法完全掌握的現象，值得再深入關注。

C. 函數觀念與能力：函數基本概念不足。

回覆意見中也有接近三成的大學老師提到此點。函數概念是微積分的重要基礎，雖然高中數學一般都會介紹多項式函數、倒數函數、指數與對數函數、三角函數等基本函數，但對多數學生來說，這些基本函數只是某種計算的對象與工具，缺乏對函數基本概念的理解，也多半不熟悉函數操作與相對應圖形平移、縮放的意義。

三次以上多項式函數與三角函數圖形的探討在 99 課綱是放在高三，如前述高三上學期的數學內容僅被指考涵蓋，造成許多學生輕忽這些內容。目前實施的 108 課綱雖然將三次函數的圖形討論置於高一，但由於學生尚未習得微分的工具，無法在學習時處理三次函數圖形關於極值點、反曲點的內容，也將造成學習的不連貫。

D. 其他：在本次調查裡，教師們對於其他項目也有回饋，只是不如前三項集中。其中包括遞迴關係、部分分式分解等。遞迴關係牽涉到微積分的函數列與函數級數單元，可視為高中教材的進一步延伸。而部分分式分解則牽涉到多項式、分式函數的操作熟練度，因此就其關鍵能力而言，反映的是目前學生計算訓練普遍不足，對於基本操作如四則運算或移項等都不像以前的學生能熟練完成，這似乎也是高中階段應該可以好好加強的。

3. 大一新生特質：學習態度與數學能力

第 1 題題幹：教學歷程中對於大一新生特質的特別感受。

意見調查的第 1 題則是針對大學教師對近年大一新生特質的觀察調查，我們主要是從學習態度與數學能力這兩個面向進行總結。

A. 學習態度

• 第一組學校：

(a) 科系對數學的需求與科系的學習風氣對學生學習態度有密切影響。

不同學院學生的學習態度具有差異性，但系所學習風氣亦造成很大的影響。理工電資學院大一新生學習態度較為專注，有較高的學習動機，對課業充滿好奇，自我意識強且勇於表達，基礎好的同學很積極參與課程，與老師有較多的互動。部份學院例如生科、農學或管理學院的學生學習動機較弱，求知慾和企圖心較低，不清楚學習微積分的目的，及與其他科目發展的關聯性，可能和該科系未能對學生詳加說明整體課程規劃有關。

(b) 大一初期學習態度較主動積極，而後逐漸下降。

高三階段學生已經初步接觸微積分（雖然不夠嚴謹完備），因此較能掌握大學微積分課程剛開始的內容，態度也顯得積極，但也因為課程內容和高中的重複，很容易導致專注力漸漸下降。之後即使課程開始轉向新概念，學生卻常因參與系上、球隊、社團或其他活動，佔去更多學習時間，學習態度往往大幅鬆懈卻缺乏警惕。到了下學期，微積分課程進入全新內容，學生的能力已經無法應付。

(c) 缺乏挑戰心態和專注力，獨立性亦較弱。

認真積極的學生雖然充滿求知慾與好奇心，而且照理說網路世代應該更有自我學習和尋找課外資源的能力。但相對於過去的學生，現在的學生卻比較缺乏自學能力，往往處於為考試和成績而讀書的被動境地，學習多半只練習考古題，關心考試的範圍，欠缺學習的主動與完整性。同時，數學程度較差的學生則處於半放棄狀態，大部份學生仍然停留在高中階段的學習模式，無法建立自己有效的學習方法及習慣。

(d) 部份學生能主動規劃未來發展方向。

與十年前情況相比較，現今學生更懂得主動尋找規劃未來的發展方向，即使一開始進入非理想的科系，在大二之前已有部份學生休學重考或訂立轉學、轉系、修讀輔系或雙學位的計畫。

• 第二組學校：

(a) 學習動機不強、專注力不足、意願薄弱消極。

整體而言，問卷反應出第二組學校的學生學習態度幾乎皆為負面感受，許多老師反映學生的學習動機不強或學習意願薄弱消極，未能將電子產品如手機等轉換為協助學習的工具，反而造成學習干擾，專注力不足。這似乎和學生入學的數學程度不佳，學習困難有直接關係。

(b) 部份學生不能主動規劃未來發展方向。

有老師反應學生不在意自己就讀的科系與興趣是否相符，缺乏學習動機時亦不積極規劃轉系或重考，或許這和學生不知進入大學的真正目的為何有關，這一現象和第一組學校的學生態度有較大差別。

B. 數學能力

• 第一組學校：

(a) 學習表現與學生出身背景或入學管道有關。

第一組學校學生大致上數學基礎能力還算不錯。一般來說，微積分教師無從得知個別學生的入學是通過學測或指考，因此無法判斷入學管道與學習表現上有無關係。不過，倒是有教授觀察到，有些科系招收部份的文科生、高職生、外籍或僑生，這些學生的數學基礎較弱，微積分學習表現欠佳。另外，根據北部某一所知名綜合型大學的統計資料顯示，學測數學成績與當年度大一微積分成績、GPA 等幾乎完全無關，比較相關的反而是語言能力科目如國文和英文。此外，繁星入學的學生入學分數或許較低，但學習態度和成效反而較好。不過，以該大學理工科系學生入學時的數學學測成績平均約有 14 級分以上來說，這個表面上與直覺相反的現象，似乎顯示學測數學成績對於數學表現前段學生的鑑別度不足。但本質上學測原本的設計就只是門檻型測驗，因此單從學測成績來進行鑑別有其本質上的困難。

(b) 學習心態和學習方法需要調整。

學生沒有真正學習的志向和精神，許多只為考試而學習，大部份傾向於如何解題而非思考問題的解決過程，觀念理解較弱，無法完整回答問題。大量計算能力、邏輯推理能力、語文閱讀和表達能力皆需要再加強。部分學生要求快速解法，甚至有部份大一新生要求老師上課模式比照補習班使用講義，喜歡運用公式操作，卻不明白其意義與推導。

• 第二組學校：

(a) 學生來源背景不同程度差異大。

部份學校可能有招生壓力，學生的來源差異性大（高職生或文組學生），導致背景知識不足，部份學生基本的邏輯推理及計算能力明顯不足、也缺乏閱讀文字的能力，學生程度差異大。

(b) 數學基礎能力不佳，理解能力逐年下降。

學生欠缺深入的思考能力，對理論和抽象思維接受度不高，基本數學符號的理解相當薄弱，不重視計算過程，只注重得到最後的答案，也無法確認答案的對錯。一般很難完整的寫出計算流程及細節，無法清楚寫下要表達的數學敘述。另外，英文能力不佳似乎也是數學學習的一大障礙。這些現象反映出第二組學校微積分教學現場所面臨的困境。

4. 結語

該如何面對大學教師期待與新生數學背景的嚴重落差，及採取哪些因應對策，是我們迫切需要討論並採取行動的議題，這在不同學校所面對的情況也極可能大不相同。許多老師在第 4、6-9 題的回答中給了相當多建設性的意見，教育議題工作小組已經對此做了初步整理，希望後續能很快提出報告和數學界同仁更廣泛討論，共同訂出行動方針。這些建議大抵包括幾個面向：(1) 了解學生背景，有適當網頁整理及解釋課綱，對學生進行先測，及課程分級。(2) 另開「基礎數學」、「pre-calculus」之類的課程作為補救措施。(3) 鼓勵學生及進行心理建設，並將課程進行方式及內容做適當調整。(4) 提供輔助教材如錄製影片、電腦繪圖及模型等，和教學輔助資源如助教、臉書或 Line 群組提供諮詢，與演習課等。(5) 其它也包括建立高中老師和大學老師之間的溝通管道，提高高中教學時數及對高中數學教育改進的建議等。(6) 建議教育部提供經費由各大學辦理微積分教學輔助措施。

有些好建議，例如另開「基礎數學」、「pre-calculus」課程作為補救措施，或是將微積分調整為每學期 3 學分，一共 3 學期的課程，這其實與目前各系精簡必修學分數的大趨勢相牴觸，受限於外在大環境並不太容易實現。在臺灣「考試領導教學」的常態下，考招制度強烈影響中學教學現場。目前的大學入學考試，無論是學測或指考，選擇題的比率都很高，這對於高中生學習數學的態度與方式有很大的影響。另一方面目前已經有超過六成的理工學生是透過推甄申請入學，大多數科系在第二階段並沒有另外的數學筆試，許多學生只針對入學測驗時的學測準備，而只針對這類深度不足的數學考題所進行的學習，及未能扎實學習高三數學課程，上大學後將不足以應付理工領域的微積分課程。許多問題的根源其實來自未能因材施教及臺灣一體適用的制度，目前就讀高中及大學比例提高，其中許多學生確實在數學的學習上發生困難，但因此的簡化內容，也同時弱化了臺灣前端理工人才的訓練與競爭力。如何克服這個困境與挑戰，是臺灣不只數學界，而是整個國家的燃眉之急。